数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 183-189



# 3項式の根の連分数展開について

橋本 竜太

## 1. $X^3+aX-b$ の根

若林氏 [5] は $X^3+aX-b$ $(0<4b\leq a)$ の実根 $x$ について次のような連分数展開表示を得ている.

$$(1)\qquad x=\frac{1|}{|a/b}+\frac{1|}{|r_1a^2/b}+\frac{1|}{|r_2a/b}+\frac{1|}{|r_3a^2/b}+\frac{1|}{|r_4a/b}+\cdots.$$

ここで, $\{r_k\}$ は以下の通り.

$$r_1=1,\quad r_2=1/2,\quad r_3=4/3,\quad r_4=9/22,\quad r_5=121/78,$$
$$r_6=338/935,\quad r_7=425/247,\quad r_8=38/115,\quad r_9=391/210,$$
$$r_{10}=13965/45356,\quad r_{11}=122728/61845,\quad r_{12}=775/2668,$$
$$r_{13}=12006/5735,\quad r_{14}=5735/20746,\quad r_{15}=52316/23865,$$
$$r_{16}=147963/558830,\quad r_{17}=30735650/13464633,$$
$$r_{18}=166063807/651595780,\quad r_{19}=817048/345247,$$
$$r_{20}=144781/587876.$$

この数字を見ていると, 次の漸化式が満たされていることが想像される.

$$(2)\qquad \begin{aligned} r_1&=1,\quad r_{2k+1}=\frac{(6k-1)(4k+3)(3k+1)}{(6k+1)(4k-1)(3k+2)}r_{2k-1},\\ r_2&=\frac{1}{2},\quad r_{2k}=\frac{(6k-5)(4k+1)(3k-1)}{(6k-1)(4k-3)(3k+1)}r_{2k-2}.\end{aligned}$$

この漸化式は本当に成り立つのだろうか.

この拙文では, より一般に, 例えば $X^N+aX-b$ の根の連分数展開表示を得ることについて考察してみる.

## 2. 巾級数の連分数表示

この節では, 巾級数の連分数表示を得る方法について復習する. 詳しくは [2, 第3章] などを参照されたい.

$x$ が $t$ のベキ級数として次のように表示されているとする.

*Date*: 2003 (平成 15) 年 10 月 2 日.

$$x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n. \tag{3}$$

Hankel 行列式 $H_k^{(n)}$ を次で定義する．

$$H_0^{(n)} = 1, \quad H_1^{(n)} = c_{n+1},$$
$$H_k^{(n)} = \det(c_{n+i+j-1})_{1 \le i,j \le k} = \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \cdots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k} & c_{n+k+1} & \cdots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数列 $\{q_k^{(n)}\}$, $\{e_k^{(n)}\}$ を次で定義する．

$$q_k^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n+1)} H_k^{(n)}}{H_{k+1}^{(n)} H_k^{(n+1)}}, \quad e_k^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)} H_{k-1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)} H_k^{(n)}}. \tag{5}$$

どの Hankel 行列式も 0 ではないとき，$\{q_k^{(n)}\}$, $\{e_k^{(n)}\}$ を用いて，$x$ は連分数として次のように書くことができる [2, 定理 3.7].

$$x = 1 + \frac{c_1 t|}{|1} - \frac{q_0^{(0)} t|}{|1} - \frac{e_1^{(0)} t|}{|1} - \frac{q_1^{(0)} t|}{|1} - \frac{e_2^{(0)} t|}{|1} - \cdots. \tag{6}$$

ところで，$\{q_k^{(n)}\}$, $\{e_k^{(n)}\}$ は，Hankel 行列式を定義しなくても次の漸化式から求まる．このアルゴリズムは商差法 (quotient-difference algorithm) として知られている．

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_0^{(n)} = \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}},$$
$$e_{k+1}^{(n)} = q_k^{(n+1)} - q_k^{(n)} + e_k^{(n+1)}, \quad q_{k+1}^{(n)} = \frac{e_{k+1}^{(n+1)}}{e_{k+1}^{(n)}} q_k^{(n+1)}. \tag{7}$$

商差法をコンピュータ上に実装することに関して，文献 [2, §3.2] の言及を引用しておく．

> 不幸にして数列の差，商，差，商，…を交互につくるこの算法は，よほど高精度で計算するか，あるいは全部を有理数で計算（整数列のとき）しないと誤差の累積がひどく，数値計算では実用にならないとされてしまった．近年数式処理システムなどの発展により，その種の計算が容易になったので，改めて見直す必要があると信じる．

## 3. $X^N - X^M + t$ の根の巾級数表示

$x$ が $X^N + aX - b$ の根であるとき,

$$X^N + aX - b = -\frac{a^N X^N}{b^{N-1}} \left( \left(\frac{b}{ax}\right)^N - \left(\frac{b}{ax}\right)^{N-1} - \frac{b^{N-1}}{a^N} \right) \tag{8}$$

であることから, $b/(ax)$ が $X^N - X^{N-1} + t$ (ただし $t = -b^{N-1}/a^N$) の根であることがわかる.

そこでこの節では, $N$, $M$ は $N > M > 0$ なる整数, $t$ は $|t| \ll 1$ なる実数として, $X^N - X^M + t$ の実根で 1 に近いもの $x$ とし, $x$ を $t$ の巾級数で表示することを考えてみる.

Glasser[1] は Lagrange の展開公式を利用することで $M = 1$ の場合の巾級数表示を得ている. Glasser の方法を改良することで, 次の式が得られる.

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{N-M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{nN-1}{N-M}\right)}{\Gamma\left(\frac{nM-1}{N-M}+1\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{N-M} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nM-1}{N-M}+1\right)_{n-1} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{9}$$

ちなみにこの表示は, $\Gamma$ 関数に関する Gauss-Legendre の相乗公式を利用することで, 一般超幾何級数の線型和に書き直すことができる. 具体的には次の通りである.

$$\begin{aligned} x = 1 - \frac{1}{N-M} &\sum_{q=0}^{(N-M)/d-1} \left(\frac{qM+N-1}{N-M}\right)_q \frac{t^{q+1}}{(q+1)!} \\ \times\ {}_{N/d+1}F_{N/d}\Big(&\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{\frac{N}{d}-1},\ 1; \\ &\beta_0,\ \ldots,\ \beta_{\frac{N-M}{d}-1},\ \gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_{\frac{M}{d}-1};\ C\,t^{(N-M)/d}\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

ただし, ${}_*F_*$ は一般超幾何級数であり, $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. さらに, $d = \gcd(M, N)$ であり, $\alpha_k$, $\beta_k$, $\gamma_k$, $C$ は次の通り.

$$\alpha_k = \frac{q+1-1/N}{(N-M)/d} + \frac{k}{N/d}, \qquad \beta_k = \frac{q+2+k}{(N-M)/d},$$

$$\gamma_k = \frac{q+(N-1)/M}{(N-M)/d} + \frac{k}{M/d}, \qquad C = \frac{\left(\frac{N}{d}\right)^{N/d}}{\left(\frac{N-M}{d}\right)^{(N-M)/d}\left(\frac{M}{d}\right)^{M/d}}.$$

## 4. $\sqrt[N]{1-t}$ の連分数展開

前節において $M=0$ とした場合について考えてみよう．このときは $X^N-1+t$ の根，すなわち $\sqrt[N]{1-t}$ について考えていることになる．

$\sqrt[N]{1-t}$ は超幾何級数として表示されることはよく知られている．一方，巾級数表示 (9) あるいは (10) において $M=0$ としてみると，その超幾何級数表示が自然に得られる．つまり，巾級数表示 (9) は $M=0$ の場合を含んでいると自然に解釈することができるのである．

ちなみに，$\sqrt[N]{1-t}$ の巾級数表示に商差法を適用すると，次が得られる．

$$
\begin{aligned}
q_k^{(n)} &= \frac{(n+k+1)(n+k+1-1/N)}{(n+2k+1)(n+2k+2)}, \\
e_k^{(n)} &= \frac{k(k+1/N)}{(n+2k)(n+2k+1)}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

このように $q_k^{(n)}$ や $e_k^{(n)}$ を $k$ と $n$ の式として表すことができると嬉しいのだが，一般にはそううまくはいかないようである．

## 5. $X^N+aX-b$ の根の連分数展開

準備は整った．$X^N+aX-b$ の実根 $x$ の連分数展開を求めてみよう．$t=-b^{N-1}/a^N$ とする．式 (9) で $M=N-1$ の場合であるから，

$$
\frac{b}{ax} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n, \quad c_n = -\frac{\big(n(N-1)\big)_{n-1}}{n!}. \tag{12}
$$

式 (6) より

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{ax} = 1 &+ \frac{b^{N-1}/a^N|}{|1} + \frac{q_0^{(0)}b^{N-1}/a^N|}{|1} + \frac{e_1^{(0)}b^{N-1}/a^N|}{|1} \\
&+ \frac{q_1^{(0)}b^{N-1}/a^N|}{|1} + \frac{e_2^{(0)}b^{N-1}/a^N|}{|1} + \cdots.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

両辺の逆数をとって，初等的変形を施すと，次が得られる．

$$
\begin{aligned}
x = \frac{1|}{|a/b} &+ \frac{1|}{|r_1a^{N-1}/b^{N-2}} + \frac{1|}{|r_2a/b} + \frac{1|}{|r_3a^{N-1}/b^{N-2}} \\
&+ \frac{1|}{|r_4a/b} + \frac{1|}{|r_5a^{N-1}/b^{N-2}} + \cdots.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ここで $\{r_k\}$ は次を満たしている.

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&r_1 = 1, && r_{2k+1} = \frac{q_{k-1}^{(0)}}{e_k^{(0)}} r_{2k-1};\\
&r_2 = \frac{1}{q_0^{(0)}} = \frac{1}{N-1}, && r_{2k} = \frac{e_{k-1}^{(0)}}{q_{k-1}^{(0)}} r_{2k-2}.
\end{aligned}
$$

計算機代数システム PARI-GP[3] 上に商差法を実装してみたところ，次が得られた.

$$
\begin{aligned}
&\frac{q_0^{(0)}}{e_1^{(0)}} = \frac{2(N-1)}{N}, && \frac{e_1^{(0)}}{q_1^{(0)}} = \frac{3N}{f_1},\\
&\frac{q_1^{(0)}}{e_2^{(0)}} = \frac{{f_1}^2}{f_2}, && \frac{e_2^{(0)}}{q_2^{(0)}} = \frac{5{f_2}^2}{3f_4},\\
&\frac{q_2^{(0)}}{e_3^{(0)}} = \frac{{f_4}^2}{{f_1}^2 f_6}, && \frac{e_3^{(0)}}{q_3^{(0)}} = \frac{7f_1{f_6}^2}{5{f_2}^2 f_9},\\
&\frac{q_3^{(0)}}{e_4^{(0)}} = \frac{f_2{f_9}^2}{{f_4}^2 f_{12}}, && \frac{e_4^{(0)}}{q_4^{(0)}} = \frac{9f_4{f_{12}}^2}{7{f_6}^2 f_{16}},\\
&\frac{q_4^{(0)}}{e_5^{(0)}} = \frac{f_6{f_{16}}^2}{{f_9}^2 f_{20}}, && \frac{e_5^{(0)}}{q_5^{(0)}} = \frac{11f_9{f_{20}}^2}{9{f_{12}}^2 f_{25}},
\end{aligned}
$$

ここで，$f_k$ は次に示す $N$ の $k$ 次多項式. PARI-GP によれば，すべて既約である.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 5N-4,\\
f_2 &= 17N^2-17N+2,\\
f_4 &= 665N^4-1674N^3+1461N^2-484N+36,\\
f_6 &= 13489N^6-40467N^5+45557N^4\\
&\quad -23669N^3+5742N^2-652N+24\\
f_9 &= 5592881N^9-29018772N^8+64343366N^7-79209700N^6\\
&\quad +58805897N^5-26749888N^4+7252920N^3-1099264N^2\\
&\quad +85008N-2304,\\
f_{12} &= 974868241N^{12}-5849209446N^{11}+15391896165N^{10}\\
&\quad -23341727570N^9+22566697851N^8-14557729890N^7\\
&\quad +6393180479N^6-1921438710N^5+391878816N^4\\
&\quad -52574800N^3+4356720N^2-197856N+3456,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{16} = {} & 5398089761801N^{16} - 47666068749520N^{15} + 192777641415040N^{14} \\
& - 472664587009620N^{13} + 783759350441270N^{12} \\
& - 928346889186524N^{11} + 808903576080860N^{10} \\
& - 526246102724300N^{9} + 256929886990505N^{8} \\
& - 93933212215860N^{7} + 25499441260876N^{6} - 5063201064640N^{5} \\
& + 717534528560N^{4} - 69625527360N^{3} + 4314288960N^{2} \\
& - 150280704N + 2073600 \\
f_{20} = {} & 10585540152954929N^{20} - 105855401529549290N^{19} \\
& + 490708890158697955N^{18} - 1399501067836126830N^{17} \\
& + 2748715998521626406N^{16} - 3944221661505238036N^{15} \\
& + 4282067518252504270N^{14} - 3595088878336418100N^{13} \\
& + 2366708616713695365N^{12} - 1231965838231509514N^{11} \\
& + 509209980625386319N^{10} - 167213589227519870N^{9} \\
& + 43485325504119540N^{8} - 8890562891654200N^{7} \\
& + 1411555059272816N^{6} - 170803721938976N^{5} \\
& + 15311640388800N^{4} - 973194560640N^{3} \\
& + 40838376960N^{2} - 992507904N + 9953280 \\
f_{25} = {} & 943657259966397052901N^{25} - 12693284042395661666400N^{24} \\
& + 80721921718847856481530N^{23} - 322687649068466481133460N^{22} \\
& + 909420443853556872334923N^{21} - 1920925396295463760517364N^{20} \\
& + 3156146973108523207758460N^{19} - 4132388270774473981811880N^{18} \\
& + 4382266253736889719792171N^{17} - 3805549106666905398055592N^{16} \\
& + 2725776745594628842219866N^{15} - 1617382351526437484590980N^{14} \\
& + 796681548097913855359525N^{13} - 325802429717243418510084N^{12} \\
& + 110428117175421166649808N^{11} - 30911212421854968480704N^{10} \\
& + 7105919712509719331040N^{9} - 1330652356598294271360N^{8} \\
& + 200698094619164308736N^{7} - 24006142685774241792N^{6} \\
& + 2228890424505857280N^{5} - 155807771340211200N^{4} \\
& + 7835499463680000N^{3} - 263661121142784N^{2} \\
& + 5201106370560N - 42998169600
\end{aligned}
$$

この計算結果を見るに，次の式が成り立つことが予想される．

$$\frac{q_k^{(0)}}{e_{k+1}^{(0)}} = \frac{f_{(k-1)(k-2)} {f_{k^2}}^2}{{f_{(k-1)^2}}^2 f_{k(k+1)}}, \quad \frac{e_k^{(0)}}{q_k^{(0)}} = \frac{(2k+1) f_{(k-1)^2} {f_{k(k+1)}}^2}{(2k-1) {f_{k(k-1)}}^2 f_{(k+1)^2}}. \tag{16}$$

ただ，$f_k$ がどのようにして得られるのか，この段階ではわからない．

## 6. 結語

以上のような次第で，この拙文では結局漸化式 (2) の証明には至らなかった．しかしながら，いろいろな例を計算してみるに，見かけはどうにもならなさそうでも，やってみると何かありそうに感じられるものはいろいろとありそうである．

## 7. 謝辞とその後

私の研究に興味を持って下さり，講演をさせていただけるように御配慮下さった秋山茂樹氏に感謝する．

その秋山氏から，研究集会が終わって暫くして，お便りをいただいた．それは，漸化式 (2) が証明されている論文 [4] を見つけたというものであった．しかし，より一般的な結果，たとえば漸化式 (16) を得るには，まだまだ考察を深める必要がある．

## References

[1] Glasser, M. L. "Hypergeometric functions and the trinomial equation," *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 118 (2000), pp. 169–173.
[2] 一松 信．**特殊関数入門**，森北出版 (1999).
[3] PARI-GP. `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`
[4] Tamm, Ulrich. "Some Aspects of Hankel Matrices in Coding Theory and Combinatorics," *Electron. J. Combin.*, vol. 8 (2001), #A1.
[5] 若林 功. "Cubic Thue inequalities with negative discriminant," *J. Number Th.*, vol. 97 (2002), pp. 222–251.